2022 – 2023

3ο Επαναληπτικό διαγώνισμα διάρκειας 3 ωρών στο 1ο κεφάλαιο
(Συναρτήσεις – Όρια – Συνέχεια)

Θέμα Α

Α1. Να διατυπώσετε, για μία συνεχή συνάρτηση, το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.
Ποιο θα είναι το σύνολο τιμών μία συνάρτησης f στο κλειστό διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$;

5 μονάδες

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

7 μονάδες

Α3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος γνησίως μονότονων συναρτήσεων $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με το ίδιο είδος μονοτονίας, αν ορίζεται η $f\circ g$ τότε είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha\in\mathbb{R}$ τότε κατ' ανάγκη ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(f(x)\right)=f(\alpha)$.

γ) Αν $f(x)\ge m$ για κάθε $x\in D_f$ τότε η f έχει ελάχιστο το m.

δ) Κάθε συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ με $f(\alpha)\ne f(\beta)$, παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

ε) Κάθε συνεχής συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση δεν τέμνει τον άξονα x΄x, δεν μπορεί να παίρνει ετερόσημες τιμές.

$2\times 5=10$ μονάδες

Α4. Σε μία σχολική τάξη ένας καθηγητής θέτει στους μαθητές του την εξής ερώτηση:
«Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι πάντοτε απροσδιόριστη μορφή $\left(\dfrac{0}{0}\right)$; »

Τότε ένας μαθητής απάντησε λέγοντας ότι:
«Η f είναι συνεχής στο x_0 άρα $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ και αφού $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=0$, τότε πάντα έχουμε απροσδιοριστία $\left(\dfrac{0}{0}\right)$».

α) Συμφωνείτε με την απάντηση του μαθητή;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

1+2=3 μονάδες

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=xe^x,\ x\ge 0$ και $g(x)=\ln x,\ x>0$.

Β1. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$.

4 μονάδες

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(e,e^2\right)$.

5 μονάδες

Β3. Έστω $h(x)=(f\circ g)(x)=x\ln x,\ x\ge 1$. Να αποδείξετε ότι η φ αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της h^{-1}.

5 μονάδες

Β4. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) \ge x$ για κάθε $x \ge 0$.

β) $f(x) > g(x)$ για κάθε x > 0.

3+3=6 μονάδες

Β5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{f(x) - x}$.

5 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x - \beta \eta\mu x + 4\alpha^2 - \beta^2 & , x \ne 0 \\ 5\alpha^2 - 2\alpha - 4\beta + 5 & , x = 0 \end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x - 2\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

4 μονάδες

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

6 μονάδες

Γ3. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες τότε:

α) Να ερμηνεύσετε την ύπαρξη των τριών ριζών γεωμετρικά.

β) Να αποδείξετε ότι τα x_1, x_2 του Γ2 ερωτήματος είναι αντίθετοι αριθμοί.

5+5=10 μονάδες

Γ4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

5 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\alpha x + \beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Δ1. Να αποδείξετε ότι α > 0.

5 μονάδες

Δίνεται επιπλέον ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}} = 1$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f^4(x) - x^2}{x + 1} = -2$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -1$.

5 μονάδες

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

5 μονάδες

Δ4. Να ορίσετε τη σύνθεση $f \circ f$.

5 μονάδες

Δ5. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln \dfrac{1}{x}$.

5 μονάδες

Ευχόμαστε κάθε επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου – Νίκος Τούντας

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

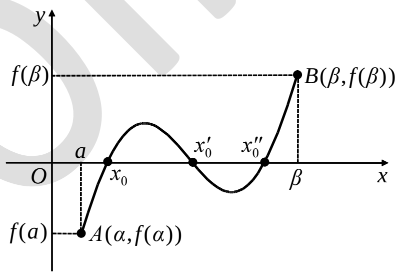
$$m \le f(x) \le M, \quad \text{για κάθε} \quad x \in [\alpha,\beta].$$

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και Μ η μέγιστη τιμή της.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Γεωμετρική ερμηνεία

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



Α3. **α)** Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

Α4. **α)** Ο μαθητής κάνει λάθος.

β) Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$ με $c \in \mathbb{R}$ τότε είναι:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 0 = 0$$ και δεν έχουμε απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Θέμα Β

Β1. Είναι $A_{f\circ g} = \{x \in A_g \,/\, g(x) \in A_f\} = \{x > 0 \,/\, \ln x \ge 0\} = \{x > 0 \,/\, x \ge 1\} = [1, +\infty)$ και

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln x \cdot e^{\ln x} = x \ln x$.

Είναι $A_{g\circ f} = \{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_g\} = \{x \ge 0 \,/\, xe^x > 0\} = (0, +\infty)$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln(xe^x) = \ln x + \ln e^x = \ln x + x, \ x > 0$

Β2.Είναι $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow x\ln x = \ln x + x \Leftrightarrow x \ln x - \ln x - x = 0$

Έστω $\varphi(x) = x\ln x - \ln x - x, \ x \in [e, e^2]$.

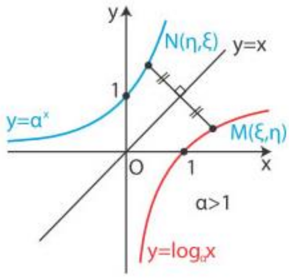
Είναι $\varphi(e) = e\ln e - \ln e - e = -1 < 0$, $\varphi(e^2) = e^2 \ln e^2 - \ln e^2 - e^2 = 2e^2 - 2 - e^2 = e^2 - 2 > 0$, άρα $\varphi(e^2)\varphi(e) < 0$. Επειδή η φ είναι συνεχής στο $[e, e^2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (e, e^2).

Β3. Για κάθε $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι $0 \le \ln x_1 < \ln x_2$, οπότε $x_1 \ln x_1 < x_2 \ln x_2 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$ οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Είναι $h(1)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=[1,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών το $h(A)=[0,+\infty)$, οπότε η h^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$.

Β4. α) Για κάθε $x \ge 0$ είναι: $f(x) \ge x \Leftrightarrow xe^x - x \ge 0 \Leftrightarrow x(e^x - 1) \ge 0$ που ισχύει γιατί $x \ge 0 \Leftrightarrow e^x \ge 1$.

β) Από τη Β΄ Λυκείου γνωρίζουμε ότι $\ln x < x$ για κάθε $x > 0$, οπότε $g(x) < x$, άρα $f(x) > g(x)$ για κάθε $x > 0$.



Β5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{g(x)}{f(x)-x} = \lim\limits_{x\to0}\left[g(x)\dfrac{1}{f(x)-x}\right] = -\infty(+\infty) = -\infty$

Γιατί $\lim\limits_{x\to0} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{f(x)-x} \underset{\substack{x\to0\Rightarrow\\ u\to0^+}}{\overset{\substack{f(x)-x=u\\ f(x)>x}}{=}} \lim\limits_{u\to0^+} \dfrac{1}{u} = +\infty$

Θέμα Γ

Γ1. Αφού η $f(x) = \begin{cases} \alpha x - \beta\eta\mu x + 4\alpha^2 - \beta^2 & , x \ne 0 \\ 5\alpha^2 - 2\alpha - 4\beta + 5 & , x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to0}(\alpha x - \beta\eta\mu x + 4\alpha^2 - \beta^2) = 5\alpha^2 - 2\alpha - 4\beta + 5 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - \beta^2 = 5\alpha^2 - 2\alpha - 4\beta + 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + \beta^2 - 4\beta + 5 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 - 4\beta + 4 = 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 + (\beta-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

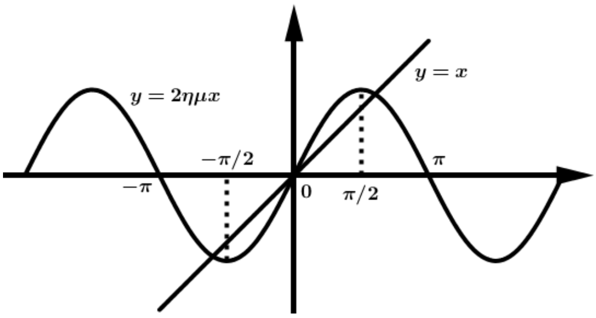
$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ \beta - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$

Επομένως $f(x) = \begin{cases} x - 2\eta\mu x & , x \ne 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x - 2\eta\mu x\ ,\ x \in \mathbb{R}$

Γ2. Είναι $f(-\pi) = -\pi - 2\eta\mu(-\pi) = -\pi < 0$ και $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2} - 2\eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2 = \dfrac{4-\pi}{2} > 0$, δηλαδή $f(-\pi)f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$ και η f είναι συνεχής άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1 \in \left(-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.

Είναι $f(\pi) = \pi - 2\eta\mu\pi = \pi > 0$ και $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - 2\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - 2 = \dfrac{\pi-4}{2} < 0$, δηλαδή $f(\pi)f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$ και η f είναι συνεχής άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_2 \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

Γ3. α) Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 2\eta\mu x$
Σχεδιάζουμε τις $y = x$ και $y = 2\eta\mu x$ και παρατηρούμε ότι έχουν ακριβώς 3 κοινά σημεία.



β) 1^ος τρόπος: Είναι $f(x_1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1 - 2\eta\mu x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2\eta\mu x_1$. Επίσης ισχύει
$f(-x_1) = -x_1 - 2\eta\mu(-x_1) = \ = -x_1 + 2\eta\mu x_1 = 0$ άρα

και το $-x_1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$. Όμως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες τις $x_1,0,x_2$ με $x_1<0<x_2$ άρα $-x_1=x_2$ άρα οι αριθμοί x_1,x_2 είναι αντίθετοι.

2ος τρόπος: Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το $-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)=-x-2\eta\mu(-x)=-x+2\eta\mu x=-f(x)$, δηλαδή η f είναι περιττή. Άρα είναι $f(-x_1)=-f(x_1)=0$ άρα και το $-x_1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$. Όμως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες τις $x_1,0,x_2$ με $x_1<0<x_2$ άρα $-x_1=x_2$ άρα οι αριθμοί x_1,x_2 είναι αντίθετοι.

Γ4. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(1-\frac{2}{x}\eta\mu x\right)\right]=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{2}{x}\eta\mu x\right)\right]=+\infty$ γιατί είναι

$\left|\frac{2}{x}\eta\mu x\right|=\frac{2}{|x|}|\eta\mu x|\le\frac{2}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{2}{|x|}\le\frac{2}{x}\eta\mu x\le\frac{2}{|x|}$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{|x|}=0$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x}\eta\mu x\right)=0$.

Άρα αφού f συνεχής, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ τότε η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Θέμα Δ

Δ1. Αν $\alpha=0$, τότε $f(x)=\sqrt{\beta}$.

Για να ορίζεται η f πρέπει $\beta\ge0$ και τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση, οπότε η περίπτωση αυτή απορρίπτεται.

Αν $\alpha<0$, τότε η f ορίζεται όταν $\alpha x+\beta\ge0\Leftrightarrow\alpha x\ge-\beta\Leftrightarrow x\le-\frac{\beta}{\alpha}$, δηλαδή $A_f=\left(-\infty,-\frac{\beta}{\alpha}\right]$.

Για κάθε $x_1,x_2\in A_f$ με $x_1<x_2$ είναι

$\alpha x_1>\alpha x_2\Leftrightarrow\alpha x_1+\beta>\alpha x_2+\beta\Leftrightarrow\sqrt{\alpha x_1+\beta}>\sqrt{\alpha x_2+\beta}\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της και απορρίπτεται η περίπτωση αυτή.

Τέλος αν $\alpha>0$ τότε η f ορίζεται όταν $\alpha x+\beta\ge0\Leftrightarrow\alpha x\ge-\beta\Leftrightarrow x\ge-\frac{\beta}{\alpha}$, δηλαδή $A_f=\left[-\frac{\beta}{\alpha},+\infty\right)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in A_f$ με $x_1<x_2$ είναι

$\alpha x_1<\alpha x_2\Leftrightarrow\alpha x_1+\beta<\alpha x_2+\beta\Leftrightarrow\sqrt{\alpha x_1+\beta}<\sqrt{\alpha x_2+\beta}\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Δ2. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\alpha x+\beta}}{\sqrt{x}}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\alpha x+\beta}{x}}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\alpha+\frac{\beta}{x}}=1\Leftrightarrow\sqrt{\alpha}=1\Leftrightarrow\alpha=1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^4(x)-x^2}{x+1}=-2\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\left(\sqrt{x+\beta}\right)^2\right]^2-x^2}{x+1}=-2\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\beta)^2-x^2}{x+1}=-2\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+2\beta x+\beta^2-\cancel{x^2}}{x+1}=-2\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(2\beta+\frac{\beta^2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=-2\Leftrightarrow2\beta=-2\Leftrightarrow\beta=-1$$

Άρα $f(x)=\sqrt{x-1}$, $x\ge1$

Δ3. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Για κάθε $x \geq 1$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = y \overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow x-1 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2+1$,

Πρέπει $x \geq 1 \Leftrightarrow y^2+1 \geq 1$ ισχύει άρα $f^{-1}(y) = y^2+1,\ y \geq 0$, οπότε $f^{-1}(x) = x^2+1,\ x \geq 0$.

Δ4. Είναι $A_{f\circ f} = \left\{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_f\right\} = \left\{x \geq 1 \,/\, \sqrt{x-1} \geq 1\right\} = \left\{x \geq 1 \,/\, x-1 \geq 1\right\} = \left\{x \geq 1 \,/\, x \geq 2\right\} = [2,+\infty)$

και $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x-1}-1}$.

Δ5. $f(x) = \ln\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = -\ln x$ (1)

Επειδή για κάθε $x \geq 1$ είναι $\sqrt{x-1} \geq 0$, η (1) είναι αδύνατη όταν $-\ln x < 0$.

Όταν είναι $-\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$, τότε η μοναδική τιμή του x για την οποία ορίζεται η εξίσωση είναι η x = 1 που αποτελεί και λύση της.